RADICALI

In questa scheda ti vengono riproposti alcuni concetti ed esercizi che ti dovrebbero essere familiari e che sono indispensabili per affrontare con successo gli studi futuri.

INSIEMI NUMERICI

Ripasso insiemi numerici:
N (insieme dei numeri naturali) = {0,1,2,3,....}
Z (insieme degli interi relativi) = {.....,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,....}
Q (insieme dei razionali relativi) = numeri che possono essere messi sotto forma di frazioni es: 0,+3; $-\frac{2}{3}$ **;** +0,6 ; $-2,\overline{7}$.
I (insieme dei numeri irrazionali) = numeri decimali illimitati non periodici (non possono essere messi sotto forma di frazioni) = π , $\sqrt{2}$, ecc..
R (numeri reali) = $Q \cup I$

Definizione. Dato un numero reale *a* e un numero naturale non nullo *n* si dice radice n-esima di *a* il numero reale *b* che elevato a *n* dà *a*.

In simboli $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow$ ____________ **con** $a,b \in R$ **e** $n \in N - \{0\}$**.**

N.B. Se a e b sono ≥ 0 allora la radice n-esima di a si dice **aritmetica** (e il risultato b è unico), altrimenti si parla di radice **algebrica** e il risultato potrebbe non esistere (nell'insieme dei numeri reali), essere unico o si potrebbero avere due valori opposti.

Esempi di radici algebriche: $\sqrt[3]{-8} = -2$ $\quad \sqrt[4]{-2} = impossibile\ in\ R$ $\quad \sqrt[2]{9} = \pm 3$.

Definizione. La scrittura $\sqrt[n]{a}$ si chiama radicale.

N.B. Il radicando dei radicali con indice pari deve essere sempre positivo o nullo. Pertanto il seguente numero irrazionale $\sqrt{-7}$ non esiste, mentre esiste il numero $-\sqrt{7}$. Il radicando dei radicali con indice dispari può anche essere negativo; pertanto esiste il numero irrazionale ______________

Le proprietà che seguono valgono solo per una particolare categoria di radicali, detti aritmetici.

Definizione. Un radicale $\sqrt[n]{a}$ si dice aritmetico quando il radicando e il risultato sono entrambi positivi o nulli.

Proprietà invariantiva. Il valore di un radicale aritmetico non cambia se si moltiplicano o si dividono l'indice del radicale e l'esponente del radicando per un loro divisore comune.

In particolare è possibile utilizzare tale proprietà per *semplificare* un radicale.

Esercizio. Semplifica i seguenti radicali:

$\sqrt[9]{27} =$ __________ $\quad \sqrt[6]{a^3b^6} =$ __________ $\quad \sqrt[6]{\frac{144}{25}} =$ __________

$\sqrt{x^2 - 10x + 25} =$ ____________ $\quad \sqrt{x^2 + y^2} =$ ________________

OPERAZIONI CON I RADICALI

Moltiplicazione
Il **prodotto di radicali aritmetici** con lo stesso indice è uguale ad un radicale avente per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi. In simboli: ____

Esercizio. $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}=$ _______ $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}=$ __________ $\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a-b}=$ ____________

Divisione
Il **quoziente di radicali aritmetici** con lo stesso indice è uguale ad un radicale avente per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi. In simboli: ____

Esercizio. $\sqrt{27}:\sqrt{3}=$ ________ $\sqrt{a^3b^2}:\sqrt[3]{ab}=$ ________ $\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{a-b}=$ ___________

Elevamento a potenza
La **potenza** di un radicale aritmetico è un radicale avente per indice lo stesso indice e per radicando la potenza del radicando. In simboli: ____

Esercizio. $\left(\sqrt[4]{5}\right)^2=$ _________________________ $\left(3\cdot\sqrt{2}\right)^2=$ __________________________

Estrazione di radice
La **radice** di un radicale aritmetico è un radicale avente per indice il prodotto degli indici.

In simboli: _________________________

Esercizio. $\sqrt{\sqrt[3]{2}}=$ ___________ $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{5}}}=$ __________

Portare fuori dal segno di radice
Un **fattore** non negativo del radicando può essere **trasportato fuori dal segno di radice**, come fattore del radicale, solo se ha un esponente maggiore o uguale all'indice del radicale.
In tal caso il suo esponente è uguale al quoziente tra l'esponente che aveva sotto il segno di radice e l'indice del radicando, mentre sotto radice resta lo stesso fattore con esponente uguale al resto della divisione.

Esercizo. $\sqrt[3]{2^8}=$ ________ $\sqrt[3]{27a^5b^2}=$ _________ $\sqrt{8a^3}=$ _________

$\sqrt{8a^6b^7}=$ __________ $\sqrt{a^2-a^3}=$ _________ $\sqrt{a^2+a}=$ ________

Definizione. Due radicali si dicono **simili** se hanno indice e radicando uguali.

Esempio. ____

Addizione.
La **somma algebrica di radicali simili** è un radicale simile agli addendi, avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.
Esercizio guidato. $2\sqrt{3}-6\sqrt{3}+\sqrt{3}=(\qquad\qquad\qquad)\sqrt{3}=$ _____________________________

Razionalizzazione.

Definizione. Razionalizzare un'espressione frazionaria significa trasformarla in una che ha il denominatore razionale (senza radicali).
Ci limitiamo a ricordare il caso più semplice di razionalizzazione: il denominatore è costituito da un unico radicale quadratico: $\dfrac{a}{b\sqrt{c}}$.
In questo caso è sufficiente moltiplicare numeratore e denominatore per il fattore $\sqrt{c}$ e si ottiene:

$\dfrac{a}{b\sqrt{c}} = \dfrac{a}{b\sqrt{c}} \cdot \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} =$ ….completa =

Esercizio. Semplifica **sul quaderno** le seguenti espressioni:

$\sqrt{20} + \sqrt{45} + \sqrt{80}$;

$2\sqrt{2} + 3\sqrt{32} + 2\sqrt{50} - \sqrt{48} - 15\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$;

$\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - \left(3 + \sqrt{2}\right)^2 + \left(2 - 3\sqrt{2}\right)^2$;

$\left(\sqrt{5} - 1\right)\left(2 + 3\sqrt{5}\right) + \left(2 + \sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{5} + 1\right)\left(\sqrt{5} - 1\right)$;

$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **;** $\qquad \dfrac{2 + \sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$ **;**

$\left(2\sqrt{5} - 3\right)^2 \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right) + \left(\sqrt{5} - 1\right)^2 \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)$;

$3\sqrt{50} + 7\sqrt{54} - \sqrt{150} - 5\sqrt{8} + \sqrt{24 +} 7\sqrt{18} - \sqrt{32} - \sqrt{6}$;

$\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right) - \left(3 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(2 - 3\sqrt{2}\right)^2$;

$\dfrac{5}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right) - \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{2} - 1\right)\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{2} + 1\right) + 2\left(\sqrt{2} + 3\sqrt{3}\right)^2$;

$\sqrt{3ab^2} : \sqrt{6ab} \qquad \sqrt{2a^3b} : \sqrt{3ab^2}$

$\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} : \sqrt{a + b} \qquad \sqrt{a^3 - b^3} : \sqrt{a - b}$

EQUAZIONI DI PRIMO GRADO IN UNA INCOGNITA

In questa scheda ti vengono riproposti alcuni concetti ed esercizi che ti dovrebbero essere familiari e che sono indispensabili per affrontare con successo gli studi futuri.

Esistono diverse definizioni che descrivono il concetto di equazione, una particolarmente semplice e spesso utilizzata al biennio è la seguente (in seguito ne introdurremo una diversa).

Definizione. Si chiama equazione un'uguaglianza tra due espressioni letterali (membri dell'equazione), verificata per particolari valori attribuiti ad una o più lettere (dette incognite).

Nella definizione sono utilizzati vari concetti come: uguaglianza, espressione letterale, verificata.
In particolare è importante sottolineare l'importanza della parola verificata.

Definizione. Un particolare valore verifica un'equazione data se, sostituito all'incognita, risulteranno uguali i due membri che la compongono.

Spesso l'insegnante invita lo studente a risolvere un'equazione, cioè a trovarne la soluzione (o le soluzioni).

Definizione. Tutti i valori che verificano un'equazione formano un insieme S detto soluzione dell'equazione.

Osservazione. L'insieme S, soluzione dell'equazione, sarà sottoinsieme di un insieme universo U di valori che possono assumere le incognite. In genere (se non è precisato diversamente l'insieme universo è costitutito dai numeri reali R, ma potrebbe essere anche un insieme diverso come N (naturali), Z (interi), Q (razionali) o C (complessi).

Definizione. Un'equazione si dice impossibile se la soluzione S è l'insieme vuoto.

Definizione. Un'equazione si dice indeterminata se la soluzione S è un insieme infinito.

Definizione. Un'equazione si dice determinata se la soluzione S è un insieme finito.

La ricerca della soluzione di un'equazione si basa sul concetto (fondamentale) di **equazioni equivalenti**. Infatti quando si risolve un'equazione, dopo aver applicato le regole del calcolo letterale per svolgere le operazioni indicate al primo e al secondo membro, si semplifica l'equazione ottenuta applicando i **principi di equivalenza**, cioè si trasforma l'equazione in un'altra che ha una forma più semplice, ma equivalente a quella data.

Definizione. Due equazioni si dicono equivalenti se hanno la stessa soluzione S.

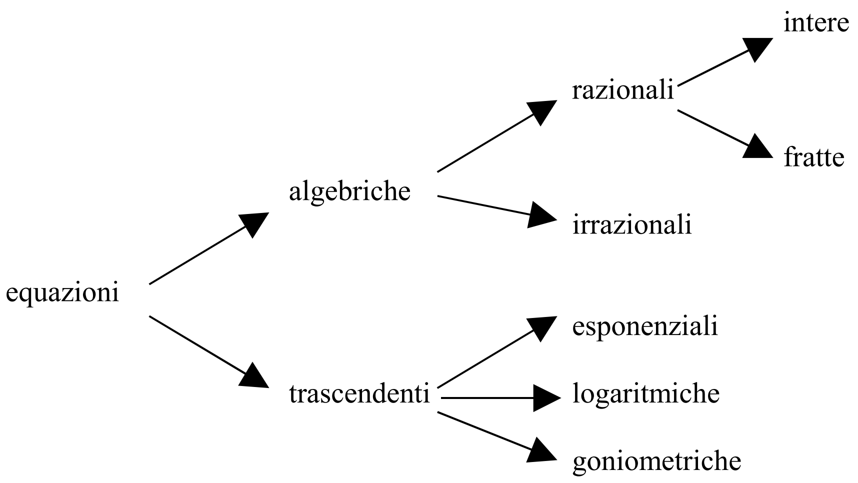
Per trasformare un'equazione in una equivalente in modo corretto ci si affida ai principi di equivalenza.

Primo principio di equivalenza. Addizionando (o sottraendo) una stessa espressione ad entrambi i membri di un'equazione si ottiene una nuova equazione equivalente a quella data.

Secondo principio di equivalenza. Moltiplicando (o dividendo) per una stessa espressione diversa da zero entrambi i membri di un'equazione si ottiene una nuova equazione equivalente a quella data.

Nota. Perché nel secondo principio si precisa che l'espressione utilizzata deve essere diversa da zero?

In base alla loro espressione analitica, le equazioni sono così classificate:



Definizione. Un'<u>equazione algebrica</u> contiene soltanto le operazioni fondamentali dell'algebra (addizione/sottrazione, moltiplicazione/divisione, elevamento a potenza, radice).

Definizione. Un'equazione algebrica <u>razionale intera</u> si dice ridotta in <u>forma normale</u> (o canonica o tipica) se il primo membro è rappresentato da un polinomio intero e il secondo membro è zero.

Esempi. Sono equazioni algebriche razionali intere in forma canonica:

$$3x = 0,\ 2x - 5 = 0,\ 3x^2 - 4 = 0,\ x^2 - 5x + 3 = 0,\ 2x^3 - 3x = 0$$

Definizione. Un'equazione algebrica razionale intera è di <u>primo grado</u> (o <u>lineare</u>) nella incognita x se, ridotta in forma canonica, assume la forma: $ax + b = 0$, dove a e b sono due numeri reali (o espressioni letterali), con a ≠ 0.

Osservazione. Se risolvendo un'equazione arrivi a semplificare tutti i monomi con l'incognita, puoi pensare (impropriamente) di avere un'equazione di primo grado ax+b=0 con a=0.
Se anche b risulta 0 la tua equazione è soddisfatta per infiniti valori, altrimenti non esiste alcun valore che soddisfa l'equazione data.

Esercizio. Completa la seguente tabella (eventuali calcoli li svolgi in un foglio di brutta).

Equazione	Forma canonica	a	b	Soluzione
2(3x - 5) = 10x + 3				S = { }
4(2x -1) = 3(2x +1) + 2x -5				S =
5(3x + 7) = 3(5x + 10) + 5				S =

Osservazioni. Dopo aver risolto l'esercizio 1 sei in grado di trarre alcune importanti conclusioni: un'equazione di primo grado in forma canonica è:

- **determinata** se a____;
- **impossibile** se a _____________ e b _____________;
- **indeterminata** se a _____________ e b _____________.

Esercizio. Risolvi le seguenti equazioni.

$$3x(x-1) - (1+x)(-4) = 2x^2 - (1-x)(1+x) + 4 \qquad 5 - [-(x+1) - 5(2x-1)] = 2 + x + 5(2x-3)$$

$$\frac{2x+1}{10} - \frac{1-3x}{5} + \frac{x-1}{2} - 2 = 2(x-2) \qquad \left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - 3 = 2\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) + \frac{16}{9} - x$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Definizione. Un'equazione algebrica razionale intera è di <u>secondo grado</u> nella incognita x se, ridotta in forma canonica, assume la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, dove a, b e c sono tre numeri reali (o espressioni letterali), con a ≠ 0.

Osservazione. Le equazioni di secondo grado le risolveremo nell'insieme dei <u>numeri reali</u>.

Definizione. Un'equazione di secondo grado, in forma canonica, si dice <u>monomia</u> se b=0 e c=0 (a≠0), cioè se è del tipo $ax^2 = 0$.

Scrivi un esempio di equazione di secondo grado monomia: ________________________________

Osservazione. Un'equazione di secondo grado monomia ha come soluzioni $x_1 = x_2 = 0$.

Definizione. Un'equazione di secondo grado, in forma canonica, si dice <u>pura</u> se b=0 (a≠0 e c≠0), cioè se è del tipo $ax^2 + c = 0$.

Scrivi un esempio di equazione di secondo grado pura: ________________________________

Osservazione. Un'equazione pura si risolve applicando i due principi di equivalenza in modo da isolare l'incognita (elevata al quadrato). <u>Se il secondo membro risulta negativo allora l'equazione risulta impossibile, altrimenti ha due soluzioni reali opposte</u>.

Esempio. Risolvi la seguente equazione: $3x^2 - 5 = 0$. Applicando il primo principio di equivalenza ottieni: ___________. Poi applicando il secondo principio di equivalenza ottieni: ___________________________.
Il secondo membro diventa il numero 5/3 (positivo), quindi l'equazione ha due soluzioni reali opposte : $x_1 =$ _____________ e $x_2 =$ _____________.

Esercizio.

$ax^2+b=0$	$ax^2 = - b$	$x^2 = - b/a$	S = { }
$4x^2 - 12 = 0$			
$2x^2 + 8 = 0$			

Definizione. Un'equazione di secondo grado, in forma canonica, si dice <u>spuria</u> se c=0 (a≠0 e b≠0), cioè se è del tipo $ax^2 + bx = 0$.

Scrivi un esempio di equazione di secondo grado spuria: ________________________________

Osservazione. Un'equazione spuria si risolve raccogliendo a fattor comune l'incognita x e poi applicando la legge dell'annullamento del prodotto (se il prodotto fra due numeri reali è nullo, allora almeno uno dei due fattori sarà nullo). <u>Un'equazione spuria ha sempre due soluzioni reali distinte</u> e <u>**una è sempre nulla**</u>.

Esempio. Risolvi la seguente equazione: $3x^2 - 5x = 0$. Raccogliendo a fattor comune la x ottieni: ___________. Poi applicando la legge dell'annullamento del prodotto ottieni: x=0 oppure _________.
Quindi l'equazione ha due soluzioni reali distinte : $x_1 =$ ______________ e $x_2 =$ _______________.

Definizione. Un'equazione di secondo grado, in forma canonica, si dice <u>completa</u> se a≠0, b≠0 e c≠0, cioè se è del tipo $ax^2 + bx + c = 0$.

Scrivi un esempio di equazione di secondo grado completa: ________________________________

Osservazione. Un'equazione completa si risolve applicando la formula risolutiva:

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, dove il radicando $\Delta = b^2 - 4ac$ è detto **discriminante**.

Se Δ>0, allora l'equazione di secondo grado ha due soluzioni reali date da: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Se Δ=0, allora l'equazione di secondo grado ha due soluzioni reali coincidenti date da: $x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$

Se Δ<0, allora l'equazione di secondo grado non ha soluzioni reali .

Osservazione. La formula risolutiva, che si utilizza nelle equazioni di secondo grado complete, potrebbe essere usata anche per le altre equazioni di secondo grado (monomie, pure, spurie), ma in genere è preferibile (e più semplice dal punto di vista dei calcoli) tenere distinti i metodi risolutivi e, dopo aver riconosciuto il tipo di equazione, si richiede di applicare la tecnica appropriata.

Per risolvere un'equazione completa si richiede di applicare la seguente procedura:

1. calcolare il discriminante Δ;
2. dichiarare se l'equazione è:
   - Impossibile (non ha soluzioni reali),
   - esistono due soluzioni reali coincidenti,
   - esistono due soluzioni reali distinte;
3. escluso il caso in cui sia impossibile, determinare le soluzioni.

Esempi. Risolvi la seguente equazione: $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Calcolando il discriminante ottieni:

Δ=____________. Quindi l'equazione ha due soluzioni reali distinte : $x_1 =$ __________ e $x_2 =$ __________.

Risolvi la seguente equazione: $2x^2 - 3x + 2 = 0$. Calcolando il discriminante ottieni: Δ=_______________.

Quindi l'equazione ____.

Risolvi la seguente equazione: $x^2 - 4x + 1 = 0$. Calcolando il discriminante ottieni: Δ=________________.

Quindi l'equazione ha due soluzioni reali e coincidenti : $x_1 =$ _______________ e $x_2 =$ _______________.

Esercizio 1. Completa la seguente tabella (eventuali calcoli li svolgi in un foglio di brutta).

Equazione	Forma canonica	a	b	c	Soluzione
$2(3x - 5)^2 = 10x + 3$					S = { }
$4(2x - 1) = 3(2x + 1)^2 + 2x - 5$					S =
$5(3x + 7)^2 = 3(5x + 10)^2 + 5$					S =

Esercizio 2. Risolvi le seguenti equazioni.

$\left(x + \dfrac{2}{3}\right)\left(x - \dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}$

$(2x - 1)^2 + (x + 1)^2 + 5x^2 = 2x$

$(3x - 2)^2 - (4x + 1)^2 = (7x + 1)(x + 2) - 35x$

$\dfrac{5}{21}x(x + 1) - \dfrac{2}{7}x^2 = \dfrac{4(x + 1)}{35} + \dfrac{x - 1}{7}$

SCOMPOSIZIONI DI POLINOMI

Definizione. Scomporre un polinomio significa riscrivere tale espressione come moltiplicazione di altri polinomi.

Osservazione. La scomposizione di polinomi si avvale di varie tecniche di base, a volte combinate tra loro, e non esiste una unica procedura da applicare in modo schematico e sempre uguale.
Le tecniche di scomposizione più usate sono:

- **raccoglimento totale a fattor comune;**
- **raccoglimento parziale a fattor comune;**
- **prodotti notevoli (quadrato e cubo di binomi, differenza di quadrati, somma e differenza di cubi);**
- **trinomio di secondo grado;**
- **regola di Ruffini.**

Descrizione del metodo di raccoglimento totale a fattor comune:

- si determina il MCD dei monomi che formano il polinomio dato;
- si determina il polinomio quoziente tra il polinomio dato e il MCD calcolato al punto precedente;
- si moltiplica il MCD per il polinomio quoziente determinato al punto precedente.

In simboli: $ka + kb + kc = k(a + b + c)$

Esempio. Scomporre il polinomio: $12x^4y^2 + 4x^3y^4 - 6xy^3$. Il MCD dei monomi che formano il polinomio è: $2xy^2$. Il quoziente tra il polinomio e MCD è: $6x^3 + 2x^2y^2 - 3y$. Quindi il polinomio scomposto diventa: $2xy^2 \cdot \left(6x^3 + 2x^2y^2 - 3y\right)$.

Descrizione del metodo di raccoglimento parziale a fattor comune:

- si raggruppano i monomi che formano il polinomio dato in modo da ottenere il polinomio come somma di altri polinomi;
- si applica il raccoglimento a fattor comune sui raggruppamenti ottenuti al punto precedente;
- si applica il raccoglimento a fattor comune dei polinomi ottenuti al punto precedente.

In simboli: $ax + bx + ay + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$

Esempio. Scomporre il polinomio: $2x^2 + 3xy - 4x - 6y$. I quattro monomi che formano il polinomio possono essere raggruppati nel seguente modo: $\left(2x^2 + 3xy\right) + \left(-4x - 6y\right)$.
Tra i due monomi che compongono il primo polinomio tra parentesi si può raccogliere a fattor comune il monomio x, mentre nel secondo polinomio si può raccogliere -2, ottenendo: $x\left(2x + 3y\right) - 2\left(2x + 3y\right)$. I due polinomi ottenuti hanno in comune il polinomio (2x+3y) che, raccolto a fattor comune, permette di ottenere la scomposizione finale: $\left(2x + 3y\right)\left(x - 2\right)$.

Descrizione dei prodotti notevoli.
Spesso i polinomi da scomporre non sono altro che il risultato di particolari espressioni chiamate prodotti notevoli, ad esempio il trinomio $x^2 + 6x + 9$ è il risultato di $\left(x + 3\right)^2$.
Per cercare di scoprire se un polinomio è il risultato di un prodotto notevole è indispensabile memorizzare le formule di quelli più utilizzati:

quadrato di binomio: $a^2 \pm 2ab + b^2 = \left(a \pm b\right)^2$;

cubo di binomio: $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = \left(a \pm b\right)^3$;

differenza di quadrati: $a^2 - b^2 = \left(a + b\right)\left(a - b\right)$;

somma o differenza di cubi: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Osservazione. Non è possibile scomporre la somma di due quadrati: $a^2 + b^2 = (a^2 + b^2)$

Esercizio. Scomporre i seguenti polinomi:

$4x^2 - 9y^2 =$ ____

$4x^2 + 9y^2 - 12xy =$ ________________________________

$4x^2 - 9y^2 =$ ____

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 =$ ________________________________

Descrizione del trinomio di secondo grado:

Dovendo scomporre il trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$, si risolve l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$. Dette x_1 e x_2 le due soluzioni trovate (ammettendo che esistano), allora la scomposizione cercata diventa: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Nel caso sia un **trinomio particolare**, ossia del tipo $x^2 + (a + b)x + ab$, allora può essere scomposto così:

$x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + ax + bx + ab = x(x + a) + b(x + a) = (x + a)(x + b)$

Esempio in $x^2 + 8x + 15$, poiché $8 = 5 + 3$ e $15 = 5 \cdot 3$, allora $x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$

Il **metodo generale per** scomporre il trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$, consiste nel calcolare il Δ dell'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$.

Se Δ**> 0,** allora dette x_1 e x_2 le due soluzioni trovate, la scomposizione cercata diventa:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Se Δ**= 0,** allora ,detta x_1 la radice doppia trovata, la scomposizione cercata diventa:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Se Δ**< 0**, allora l'equazione associata non ammette soluzioni e il trinomio **non è scomponibile.**

Esempio. Scomporre il polinomio: $3x^2 - 13x - 10$. L'equazione associata ha come soluzioni: $x_1 = -\frac{2}{3}$ e $x_2 = 5$, quindi la scomposizione diventa: $3x^2 - 13x - 10 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 5)$, che è preferibile scrivere nel seguente modo: $3x^2 - 13x - 10 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 5) = (3x + 2)(x - 5)$.

Descrizione della regola di Ruffini.

Utilizzando la regola di Ruffini è possibile scomporre un polinomio di grado n come prodotto tra un binomio di primo grado e un altro polinomio di grado n-1.

Definizione: il numero reale k è uno ***zero*** del polinomio P(x), se sostituendo k ad x nel polinomio, il valore di quest'ultimo diventa zero.

Esempio. 3 è uno zero del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 19x + 12$ in quanto $P(3) =$ ________________

Si noti che gli zeri di un polinomio sono anche le soluzioni dell'equazione associata.

Come fare a trovare gli *zeri* di un polinomio.

- Se un polinomio ammette uno ***zero intero,*** esso deve essere ricercato tra i divisori (sia positivi sia negativi) del termine noto.

- Se un polinomio ammette uno ***zero fratto***, esso deve essere ricercato tra le frazioni (sia positive sia negative) aventi come numeratore un divisore del termine noto e come denominatore un divisore del coefficiente del termine di massimo grado.

<u>Teorema di Ruffini</u>
Se k è uno zero del polinomio P(x) allora è possibile scomporre quest'ultimo in $P(x) = (x - k) \cdot Q(x)$.

N.B. $(x - k)$ è un fattore di primo grado e k lo zero trovato, $Q(x)$ è il quoziente tra $P(x)$ e $(x - k)$, e sarà un polinomio di <u>un grado inferiore</u> a $P(x)$.

Per determinare il polinomio quoziente Q(x) si può usare la **regola di Ruffini**.

Descriviamo questa regola con un esempio.

Esempio. Scomporre il polinomio: $2x^3 + 5x^2 - 3$.
Scomponendo il polinomio con Ruffini si ottiene il prodotto tra un polinomio di primo grado e un polinomio di secondo.
Scrivo i divisori di 3: ± 1; ± 3;
Sostituisco, nel polinomio, il primo valore (+1) alla variabile x e ottengo 4 ($\neq 0$).
Sostituisco, nel polinomio, il secondo valore (-1) alla variabile x e ottengo 0.
Posso costruire lo schema di Ruffini usando il numero -1:

Coefficienti del polinomio P(x), ordinato e completato

	2	5	0	-3
-1		-2	-3	+3
	2	3	-3	0

$Q(x)$ quindi è dato da $(2x^2 + 3x - 3)$ e $(x - k)$ è dato da $(x + 1)$
I due polinomi da utilizzare nella scomposizione sono quindi $(2x^2 + 3x - 3)$ e (x+1):

$$2x^3 + 5x^2 - 3 = (2x^2 + 3x - 3)(x + 1).$$

Esercizio 2. Scomponi i seguenti polinomi.

$2x^2y + 3x^3y^2 - 7x^5y^4$	$1 + x^2 - 2x$	$9x^2 - 16y^2$
$x^2 + 3x - 40$	$x(2a - b) + y(2a - b)$	$9a^2 - 6ab + b^2$
$8a^3 + 1$	$x^3 - 4x + 3$	$3 - 3a^4$
$ab - ay - bx + xy$	$a^4 - 16$	$1 - 9a^6$
$8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$		$6a - 4ab^2 - 15b + 10b^3$
$x^3 + 2x^2 + x$	$6x^2 + 5xy + y^2$	$2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$
$3a(x + y)^2 - 2ax - 2ay$	$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$	$a^2 - 4a + 4$

EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Per le equazioni di grado superiore al secondo non si esegue uno studio completo, ma di tali equazioni si studiano solo alcuni tipi particolarmente semplici.
Le equazioni algebriche che si incontrano più di frequente nel triennio sono:
le monomie, le binomie, le trinomie, le equazioni abbassabili di grado (scomponibili).
Definizione. Un'equazione algebrica razionale intera si dice monomia se, ridotta nella forma normale, è del tipo $ax^n = 0$, con a numero reale diverso da 0.
Osservazione. Un'equazione monomia di grado n ha sempre n soluzioni tutte nulle.
Definizione. Un'equazione algebrica razionale intera si dice binomia se, ridotta nella forma normale, è del tipo $ax^n + b = 0$, con a e b numeri reali diversi da 0.
Osservazione. Quando si risolve un'equazione binomia è importante distinguere se il grado è pari o dispari:

- un'equazione binomia di grado dispari ha una ed una sola soluzione reale: $x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$;
- un'equazione binomia di grado pari può essere impossibile (quando $\frac{-b}{a}$ è un numero negativo) o avere due soluzioni reali opposte (quando $\frac{-b}{a}$ è un numero positivo) $x = \pm\sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$.

Osservazione. Per risolvere un'equazione binomia occorre dapprima esplicitare x^n ; quindi $ax^n = -b$, da cui $x^n = -\frac{b}{a}$; poi seguire la seguente tabella

n	$-\frac{b}{a}$	Soluzioni	Esempio	
pari	positivo	$x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x^4 = 16$	$x_{1,2} = \pm 2$
pari	negativo	$S = \Phi$	$x^4 = -2$	$S = \Phi$
dispari	positivo	$x_1 = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x^3 = 27$	$x_1 = +3$
dispari	negativo		$x^3 = -8$	$x_1 = -2$

Esempio. Risolvere le seguenti equazioni.
$2x^4 - 3 = 0$: ricavo l'incognita (elevata alla quarta) applicando i due principi di equivalenza e ottengo $x^4 = \frac{3}{2}$; il valore al secondo membro è positivo quindi l'equazione ha due soluzioni reali opposte: $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$.
$5x^3 + 1 = 0$: l'equazione binomia è di grado dispari quindi ha sempre una soluzione reale; ricavo l'incognita (elevata alla terza) applicando i due principi di equivalenza e ottengo $x^3 = -\frac{1}{5}$; la soluzione sarà $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{5}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$.
Definizione. Un'equazione algebrica razionale intera si dice trinomia se, ridotta nella forma normale, è del tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, con a, b, c numeri reali diversi da 0.

Osservazione. Un'equazione trinomia avrà sempre grado pari. Un'equazione trinomia ha una sintassi che ricorda un'equazione di secondo grado; per risolverla si utilizza una posizione.
Si pone $x^n = t \ e \ quindi \ x^{2n} = t^2$, ottenendo una equazione di secondo grado nella incognita t: $at^2 + bt + c = 0$. Si risolve l'equazione di secondo grado (la quale potrà avere due soluzioni reali coincidenti, due soluzioni reali distinte, oppure nessuna soluzione reale). Trovate le (eventuali) soluzioni nell'incognita t, si risolvono due equazioni binomie (se due sono le soluzioni trovate): $x^n = t_1 \ o \ x^n = t_2$.
Esempio. Risolvere la seguente equazione: $2x^8 - 3x^4 + 1 = 0$.
L'equazione è trinomia di ottavo grado. Si pone $x^4 = t$ e si ottiene l'equazione di secondo grado: $2t^2 - 3t + 1 = 0$. Risolta otteniamo due soluzioni $t_1 = 1 \quad o \quad t_2 = \frac{1}{2}$. Sostituendo a t_1 e a t_2 il monomio x^4 otteniamo due equazioni binomie di quarto grado: $x^4 = 1 \quad o \quad x^4 = \frac{1}{2}$, che danno le quattro soluzioni reali: $x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1 \quad o \quad x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$.
Definizione. Un'equazione algebrica razionale intera (di grado superiore al secondo), ridotta nella forma normale, si dice abbassabile di grado se è possibile scomporre il polinomio al primo membro.

Osservazione. Per risolvere un'equazione abbassabile di grado devi:
- ridurla in forma canonica;
- scomporre il primo membro;
- applicare la **legge dell'annullamento del prodotto** (se il prodotto tra due numeri reali e nullo allora almeno uno dei due fattori è nullo);
- risolvere le equazioni ottenute applicando uno o più dei metodi illustrati precedentemente.

Esempio. Risolvere la seguente equazione (già scomposta in fattori):
$x^2(x^2 + 1)(2x^2 + 3x + 1) = 0$. Applicando la legge dell'annullamento del prodotto scriviamo le seguenti equazioni: $x^2 = 0 \ o \ x^2 + 1 = 0 \ o \ 2x^2 + 3x + 1 = 0$. La prima equazione (monomia di secondo grado) ha due soluzioni reali coincidenti x=0; la seconda equazione (di secondo grado pura) non ha soluzioni reali, la terza equazione (di secondo grado completa) ha due soluzioni reali distinte x=-1 o x=-1/2. Quindi le soluzioni della nostra equazione sono:

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = -1; x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Osservazione. Le equazioni algebriche possono essere risolte anche nell'insieme dei numeri complessi C. Ad esempio l'equazione $x^2 = -4$, impossibile in R, avrà due soluzioni complesse $x_1 = 2i \ e \ x_2 = -2i$, dove i è l'unità immaginaria definita ne seguente modo $i^2 = -1$.
Una equazione di secondo grado avrà sempre due soluzioni (complesse), una equazione di terzo grado avrà sempre tre soluzioni (complesse), ecc.
I numeri complessi godono quindi di una importante proprietà: permettono di risolvere sempre una equazione algebrica razionale intera, infatti vale il seguente teorema.
Teorema fondamentale dell'algebra. Un'equazione algebrica razionale intera ammette un numero di soluzioni complesse pari al grado dell'equazione stessa.
Esercizio. Risolvi le seguenti equazioni.

$x^6 - 64 = 0 \qquad x^4 + 3x + 2 = 0 \qquad 3x^4 + 2 = 0 \qquad 4x^3 - 21x^2 + 21x - 4 = 0 \qquad 4x^3 + 5 = 0$

$x^4 3x^2 + 2 = 0 \qquad 6x^3 - 7 = 0 \qquad 4x^3 - 3x - 1 = 0 \qquad 9x^6 - 10x^2 + 1 = 0 \qquad x^5 - 3x = 0$

$x^4 + 1 = \frac{5x^3 + 38x^2 + 5x}{6}$

EQUAZIONI FRATTE E LETTERALI

Definizione. Una equazione algebrica si dice <u>fratta</u> o <u>frazionaria</u> quando l'incognita (almeno una) compare in almeno un denominatore.

Osservazione. L'equazione $\frac{3x-1}{5}=2$ è intera; l'equazione $\frac{3x-1}{a+1}=2$ è intera rispetto all'incognita x; l'equazione $\frac{3x-1}{x+1}=2$ è fratta.

Come si risolve una equazione fratta.
Esiste una differenza fondamentale tra un'equazione intera e una fratta. In un'equazione intera si cercano i valori che la verificano, tra **<u>tutti</u>** quelli appartenenti ad un certo insieme universo U (in genere l'universo al quale appartengono le soluzioni delle equazioni che studiamo è l'insieme dei numeri reali). Infatti siamo abituati a pensare che alla incognita possiamo attribuire qualsiasi valore (reale) e solo alcuni di questi saranno soluzione. In una equazione fratta non possiamo pensare che la variabile x possa assumere qualsiasi valore perché alcuni numeri fanno perdere di significato alla nostra espressione. Infatti nell'equazione fratta $\frac{3x-1}{x+1}=2$ è vietato sostituire alla variabile x il numero -1 perché ____.

In altre parole, <u>per risolvere un'equazione fratta</u>:
- si determinano quali valori può assumere l'incognita x (escludendo i valori che annullano i vari denominatori);
- si trasforma l'equazione fratta in una intera (applicando il secondo principio di equivalenza);
- si riduce in forma canonica;
- si risolve;
- si escludono, tra i valori trovati, quelli che, eventualmente, annullano i denominatori.

Esempi. Risolvere l'equazione $\frac{3x-1}{x+1}=2$. Il denominatore x+1 si annulla (x+1=0) quando x=-1, quindi dichiariamo che la variabile x deve essere diversa da -1 (queste dichiarazioni si chiamano, di solito, Condizioni di Esistenza, quindi CE: x ≠ -1);
Riduciamo allo stesso denominatore i due membri dell'equazione: $\frac{3x-1}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x+1}$;
applichiamo il secondo principio di equivalenza (moltiplichiamo entrambi i membri per (x+1), dopo averla posta diversa da zero!!!, e otteniamo un'equazione intera: 3x-1=2(x+1). Svolgendo i calcoli e applicando il primo principio di equivalenza otteniamo una equazione di primo grado in forma canonica: x-3=0. La soluzione di questa equazione è x=3. Questa è anche la soluzione dell'equazione fratta iniziale? ____________.

Risolvere l'equazione $\frac{5}{x}+\frac{x}{5}=\frac{x^2+25+x}{5x}$. Come prima scriviamo le CE: x ≠ 0. Riduciamo allo stesso denominatore (5x) e applichiamo il secondo principio, ottenendo l'equazione intera: $25+x^2=x^2+25+x$. La soluzione x=0 non è accettabile (CE: x ≠ 0) quindi l'equazione fratta è <u>impossibile</u>.

Definizione. Una equazione si dice <u>letterale</u> se, oltre alle incognite, contiene altre lettere.

<u>Come si risolve una equazione letterale.</u>
Una equazione letterale può essere intera o fratta rispetto alle incognite e le altre lettere, a loro volta, possono comparire sia a numeratore che a denominatore.

Esempi. L'equazione $\frac{3x+1}{2}=5a-7$ è una equazione letterale intera e la lettera non compare a denominatore.

Scrivi una equazione letterale intera, nella incognita x e con lettere a denominatore ____________________.
Scrivi una equazione letterale fratta, nella incognita x e senza lettere a denominatore ___________________.
Scrivi una equazione letterale fratta, nella incognita x e con lettere a denominatore ____________________.

Per risolvere una equazione letterale (intera o fratta):

- si scrivono le CE sui denominatori che contengono l'incognita o altre lettere;
- si riduce a equazione intera;
- si riduce in forma canonica (secondo membro diventa 0 e al primo membro si raccoglie l'incognita x tra i monomi di primo grado (rispetto a x), si raccoglie x^2 tra i monomi di secondo grado, ecc.
- si riconosce il tipo di equazione ottenuta e si risolve applicando la tecnica appropriata.

Esercizio. Risolvi le seguenti equazioni.

4. $ax = 1 - bx$

5. $\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2 - x} = \frac{9}{2x - 2}$

6. $\frac{3x}{3x^2 + 14x + 8} - \frac{11}{13x + 52} = \frac{4}{3x + 2}$

7. $4(x - a) + 3b = 3(x - a - b) - x + a + b$

8. $\frac{ax + a}{a - 1} - 1 = \frac{(a + 1)x - 2}{a + 3}$

9. $\frac{1}{1 - x} - \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 + x}$

10. $\frac{y - b}{4} = \frac{b}{y + b} + \frac{1}{y + b}$

11. $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

12. $\frac{x^2}{625} = \frac{1}{x^2}$

13. $\frac{3}{x^2 - 1} - \frac{4}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{1 - x^4} - 8$

SISTEMI DI EQUAZIONI DI PRIMO E DI SECONDO GRADO

Definizione. Un sistema è un insieme formato da due o più equazioni delle quali si cercano le soluzioni comuni.

Osservazione. Per indicare che due o più equazioni formano un sistema è consuetudine racchiuderle all'interno di una parentesi graffa.

Definizione. Un sistema formato da equazioni algebriche si dice ridotto in forma canonica se tutte le equazioni che lo compongono sono state ridotte in tale forma e ordinate le incognite nello stesso modo.

Definizione. Si dice grado di un sistema (formato da equazioni algebriche razionali intere e in forma canonica) il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono.

Osservazione. Dalla definizione data si deduce che:
- un sistema è di primo grado (o lineare) se è formato da equazioni algebriche razionali intere tutte di primo grado;
- un sistema è di secondo grado se è formato da equazioni algebriche razionali intere di primo grado e da una di secondo.

Come risolvere un sistema di primo grado formato da due equazioni in due incognite.
Un sistema di primo grado, ridotto in forma canonica, può essere risolto, in modo analitico, applicando uno dei seguenti metodi:
14. sostituzione;
15. confronto;
16. riduzione;
17. Cramer.

Metodo di sostituzione:
- riduci il sistema in forma canonica;
- ricava dalla prima equazione (o dalla seconda) una incognita;
- sostituisci nell'altra equazione al posto dell'incognita l'espressione trovata al punto precedente (ottieni una equazione in una incognita);
- risolvi l'equazione trovata al punto precedente;
- sostituisci nella prima equazione, al posto dell'incognita, il valore appena trovato;
- ricava da questa equazione il valore della seconda incognita.

Osservazione. In un sistema lineare di due equazioni in due incognite trovi, in generale, due valori (uno per una incognita e uno per l'altra), ma non devi pensare di aver trovato due soluzioni perché la coppia trovata rappresenta **una soluzione del sistema**.

Metodo del confronto:
- riduci il sistema in forma canonica;
- ricava da entrambe le equazioni la stessa incognita;
- eguaglia le due espressioni trovate al punto precedente (rappresentano lo stesso valore);
- risolvi l'equazione scritta al punto precedente (così determini una incognita);
- sostituisci il valore trovato in una delle due equazioni del sistema;
- risolvi l'equazione scritta al punto precedente (così determini l'altra incognita);

Metodo di riduzione:

- riduci il sistema in forma canonica;
- moltiplica la prima equazione per il coefficiente della prima incognita posta nella seconda equazione;
- moltiplica la seconda equazione per il coefficiente della prima incognita posta nella prima equazione;
- esegui la sottrazione membro a membro delle due equazioni ottenute (il termine con la prima incognita si annulla);
- risolvi l'equazione ottenuta (ricavi la seconda incognita);
- sostituisci il valore trovato in una delle equazioni del sistema e trovi la prima incognita.

Metodo di Cramer:

- riduci il sistema in forma canonica, ponendo i termini noti al secondo membro:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

- applica le seguenti formule (dette di Cramer) e ricavi le incognite:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\[2ex] y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{cases}$$

Osservazione. Come per le equazioni, un sistema di primo grado può essere:

- impossibile (nessuna soluzione reale);
- indeterminato (infinite soluzioni reali);
- determinato (una soluzione reale).

Esercizio 4. Perché il seguente sistema è **impossile**?

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 9 \end{cases}$$

____

Perché il seguente sistema è **indeterminato**?

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 14 \end{cases}$$

____

Come risolvere un sistema di secondo grado formato da due equazioni in due incognite.
Un sistema di secondo grado formato da due equazioni in due incognite è sempre costituito da una equazione di primo grado e da una di secondo.
Un sistema di questo tipo si risolve con il metodo di sostituzione:

- si ricava una incognita dall'equazione di primo grado;
- si sostituisce l'espressione trovata in quella di secondo grado;
- si risolve l'equazione di secondo grado in una incognita (due soluzioni);
- si sostituiscono i valori trovati nell'equazione ricavata al primo punto e si trovano le due soluzioni dell'altra incognita.

Osservazione. In generale si trovano quattro valori x_1, x_2, y_1, y_2, due per ogni incognita. Il sistema, però, ha due soluzioni, ciascuna formata da una coppia di valori: una soluzione sarà (x_1, y_1) e l'altra sarà (x_2, y_2).
Possono poi esserci i seguenti casi particolari:

- il sistema è **impossibile** (nessuna soluzione);
- il sistema ha le **soluzioni coincidenti**.

Come risolvere un sistema di primo grado formato da tre equazioni in tre incognite.
Il metodo preferito dagli studenti, generalmente, per risolvere questi sistemi è il metodo di sostituzione:

1. si ricava una incognita da una equazione;
2. si sostituisce l'espressione trovata nelle altre due equazioni;
3. le due equazioni ottenute al punto precedente formano un sistema di due equazioni in due incognite;
4. si risolve il sistema del punto precedente;
5. la soluzione trovata al punto 4 si sostituisce nell'equazione del punto 1;
6. si risolve l'equazione del punto precedente.

Esempio. Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x+3y-4z=5 \\ 4x+y-3z=2 \\ 3x+2y+5z=6 \end{cases}$.

Ricavo l'incognita y dalla seconda equazione (è la cosa più semplice da fare) e ottengo:

y=-4x+3z+2 (*).

Sostituisco nelle altre due equazioni e ottengo il sistema nelle incognite x e z:

$$\begin{cases} 2x+3(-4x+3z+2)-4z=5 \\ 3x+2(-4x+3z+2)+5z=6 \end{cases}.$$

Risolvo il sistema e ottengo: $\begin{cases} x=\dfrac{21}{85} \\ z=\dfrac{5}{17} \end{cases}$. Sostituisco questi valori nell'equazione (*) e ottengo

y=161/85. La soluzione del sistema diventa quindi: $\begin{cases} x=\dfrac{21}{85} \\ y=\dfrac{161}{85} \\ z=\dfrac{5}{17} \end{cases}$.

Esercizi. a) Ridurre i seguenti sistemi in forma canonica, poi risolverli col metodo indicato.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{10}{3} \\ 2 - [3(x-1) - 2(y+1)] = \dfrac{21}{2} \end{cases}$$ sostituzione

$$\begin{cases} \dfrac{2x-2y+5}{3} - x = \dfrac{3x-4y}{6} \\ \dfrac{4x-6y}{4} = \dfrac{3x-2y}{2} - \dfrac{5}{4} \end{cases}$$ confronto

$$\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2} - \dfrac{x-3y}{3} = \dfrac{14}{3} \\ 3x - \dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{4}x = 24 \end{cases}$$ riduzione

$$\begin{cases} \dfrac{3x+2}{5} + \dfrac{y-2}{3} = 3 + \dfrac{3x-y}{2} \\ (3x-2)^2 + (y-3)^2 = (3x-y)^2 - 29 + 6xy \end{cases}$$ Cramer

$$\begin{cases} 3(x+2y) = 4 \\ \dfrac{2}{x+2y} - \dfrac{3}{x-2y} = \dfrac{1}{x^2-4y^2} \end{cases}$$ Cramer

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 4z = 16 \\ 2y - 3z = -5 \end{cases}$$ sostituzione

$$\begin{cases} 3 - y + z = 10 \\ 2x + y + z = 12 \\ 4x + 3y + z = 26 \end{cases}$$ sostituzione

b) risolvere i seguenti sistemi di secondo grado mediante <u>sostituzione</u>:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -1 \\ 2x^2 + y^2 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 + 7 = 3xy + 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{y+4} = \dfrac{1}{14} + \dfrac{y}{2} \\ x - y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 12a \\ x^2 + y^2 = 13a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = \dfrac{a}{2} \\ 2x + 2xy = 5a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = b \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 2a + 1 \\ y(x-y) = a \end{cases}$$

c) Risolvi il seguente sistema: $\begin{cases} 3x - 2(x - 4y + 1) = 0 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$

d) Risolvi il seguente sistema: $\begin{cases} 3x^2 - 2x - 5y + 6 = 0 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$

LA RETTA NEL PIANO CARTESIANO

Una retta nel piano cartesiano può essere vista come un particolare luogo geometrico.
Ricordiamo allora la definizione di luogo geometrico.

Definizione. Si chiama luogo geometrico l'insieme di tutti e soli i punti che soddisfano una certa proprietà.

Esempi. La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano che hanno la proprietà di essere equidistanti da un punto fisso (detto centro).
La superficie di una sfera è il luogo geometrico dei punti dello spazio che hanno la proprietà di essere equidistanti da un punto fisso (detto centro).
L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano che hanno la proprietà di essere equidistanti dagli estremi del segmento.

Vediamo la retta come luogo geometrico in un piano cartesiano.

Data l'equazione di primo grado 3x-4=0, nella incognita x, sai perfettamente che l'unica soluzione è data da ____.

Se consideri ora l'equazione di primo grado 3x+y-4=0, nelle incognite x e y, puoi verificare che la coppia ordinata (0; 4) soddisfa l'equazione data.
Sapresti trovare un'altra coppia che sia soluzione dell'equazione? ______________________________

Quante sono le soluzioni dell'equazione 3x+y-4=0? ____

Ogni soluzione è costituita da una coppia ordinata di numeri reali (x; y). Ciascuna di queste coppie individua un punto sul piano cartesiano e tutti questi punti (infiniti) formano (appartengono a) ____________________.

Questo risultato può essere dimostrato in generale ed è enunciato dal seguente teorema.

Teorema. Il luogo geometrico dei punti del piano cartesiano che soddisfano l'equazione lineare ax+by+c=0 (con almeno uno dei coefficienti a e b diversi da zero) è una retta e viceversa (una retta del piano cartesiano è il luogo dei punti che soddisfano una equazione lineare nelle incognite x e y).

Osservazione. Il teorema precedente ci autorizza indicare ax+by+c=0 come **l'equazione di una retta**.
Come sai questa equazione viene detta in **forma implicita** per distinguerla da un'altra equazione della retta, chiamata **esplicita** (ne parleremo fra poco).

Casi particolari
È importante riflettere su alcune rette del piano cartesiano che acquistano particolare importanza concettuale e/o pratica (quando si devono svolgere gli esercizi) e che conosci già:

- la retta che forma l'asse x ha equazione: _______________ a= _______, b=_______, c=________
- la retta che forma l'asse y ha equazione: _______________ a= _______, b=_______, c=________
- una retta parallela all'asse x ha equazione: _______________ a= _______, b=_______, c=________
- una retta parallela all'asse y ha equazione: _______________ a= _______, b=_______, c=________
- una retta passante per l'origine degli assi ha equazione: ____________a= ______, b=_____, c=_____
- la retta by+c=0 (a=0) è una retta ____
- la retta ax+c=0 (b=0) è una retta ____
- la retta ax+by=0 (c=0) è una retta ____
- la retta ax =0 (b=0 e c=0) (oppure x=0) è una retta ______________________________
- la retta by =0 (a=0 e c=0) (oppure y=0) è una retta ______________________________

Osservazione. L'equazione dell'asse x è _________________, quella dell'asse y è _________________

Esercizio 1 (da svolgere sul quaderno). Data la retta di equazione 2x+3y-1=0:
- determina l'intersezione con l'asse x;
- determina l'intersezione con l'asse y;
- rappresentala sul piano cartesiano.

Suggerimenti per la soluzione. Per determinare l'intersezione con l'asse x devi impostare e risolvere il sistema:

$$\begin{cases} equazione\ \ retta \\ equazione\ \ asse\ \ x \end{cases}$$

troverai così una coppia di numeri reali che rappresenta un punto sul piano cartesiano.

Analogamente, per determinare l'intersezione con l'asse y devi impostare e risolvere il sistema:

$$\begin{cases} equazione\ \ retta \\ equazione\ \ asse\ \ y \end{cases}$$

Per rappresentare la retta sul piano ricorda che sono sufficienti due punti. Attenzione, due punti li hai già trovati (sono le intersezioni con gli assi) e puoi usare questi se sono sufficientemente distanti da permetterti un grafico accurato, altrimenti dovrai trovarne un terzo assegnando, nell'equazione della retta, un valore a piacere alla variabile x (ad esempio 5) per poi ricavare il corrispondente valore di y.

Esercizio 2 (sul quaderno). Date le rette x-2y+3=0 e 2x-y-2=0, x+2=0, y-3=0:
- determina, per ciascuna retta, l'intersezione con l'asse x;
- determina, per ciascuna retta, l'intersezione con l'asse y;
- rappresenta le rette sul piano cartesiano;
- determina l'intersezione tra le due rette (le prime due dell'esercizio).

Equazione di una retta in forma esplicita
Spesso le equazioni delle rette sono scritte in una forma diversa da quella implicita, detta forma esplicita. Questo modo di scrivere l'equazione di una retta consiste nel ricavare la variabile y dalla forma implicita.
Tutte le rette in forma implicita ax+by+c=0 possono essere esplicitate rispetto ad y? ______________
Attenzione, per poter esplicitare l'equazione implicita deve esserci il monomio con la variabile y, cioè deve essere diverso da zero il coefficiente:

a b c.

In altre parole non sono esplicitabili le rette in forma implicita con ______, cioè del tipo : ________________

L'equazione di una retta in forma esplicita diventa quindi: $y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}$, con b ≠ 0.

Esercizio 3 (sul quaderno). Esplicita le seguenti rette:

$3x + 5y + 1 = 0;\ \ 3x + 5y = 0;\ \ 5y + 1 = 0;\ \ 3x = 0;\ \ 5y = 0.$

Osservazione. Spesso nei libri di testo le equazioni delle rette in forma esplicita sono scritte nel seguente modo: **y=mx+q**. I coefficienti m e q sono dati rispettivamente dalle frazioni (si ricavano dall'equazione esplicita):

$$m = \qquad e \qquad q =$$

<u>Cerchiamo ora di capire quale significato attribuire ad **m** e a **q** dal punto di vista geometrico.</u>

Esercizio 4 (sul quaderno). Rappresenta sul piano cartesiano le seguenti rette:

$$y = \frac{1}{2}x;\ y = x;\ y = 2x;\ y = 3x;\ y = -2x;\ y = -x;\ y = -\frac{1}{2}x$$

Le rette che hai rappresentato hanno valori diversi di m e tutte lo stesso valore di q (0). Puoi notare che al variare dei valori attribuiti ad m ottieni rette che hanno diversa inclinazione, infatti il valore di m stabilisce la <u>pendenza della retta</u>, cioè <u>fissa l'angolo che si forma tra l'asse x e la retta</u>..

Per questo motivo il coefficiente m della variabile x viene chiamato **coefficiente angolare**.

Osservazione. Se osservi i grafici dell'esercizio precedente, puoi notare che se consideri due punti su una retta con ascissa che differiscono di 1, allora le rispettive ordinate differiscono di

_____________________.

In altre parole: il coefficiente angolare indica la variazione di y quando x varia di una unità, per i punti appartenenti ad una retta.

Esercizio 5(sul quaderno). Rappresenta sul piano cartesiano le seguenti rette:

$$y = 2x;\ y = 2x - 1;\ y = 2x + 1;\ y = 2x - 3;\ y = 2x + 3$$

Le rette che hai rappresentato hanno valori diversi di q e tutte lo stesso valore di m (2). Puoi notare che al variare dei valori attribuiti a q ottieni rette che hanno diversa intersezione con l'asse delle ordinate, infatti <u>il valore di q stabilisce l'ordinata del punto di ascissa nulla.</u>

Per questo motivo il termine q (detto anche termine noto) viene chiamato **ordinata all'origine.**

Esercizio 6 (sul quaderno). Date le rette 3x+2y-1=0, 2x-y=0 e x+y=0:

18. riscrivi le equazioni in forma esplicita;
19. determina, per ciascuna di esse, le intersezioni con gli assi cartesiani;
20. rappresentale sul piano cartesiano;
21. determina le intersezioni tra le rette, a due a due;
22. determina il perimetro del triangolo formato dalle tre rette.

È frequente, nei problemi, dover determinare l'equazione di una retta noti alcuni elementi (informazioni). Questi problemi si affrontano agevolmente con quanto hai già ripassato e con poche nozioni che ora riassumiamo.

- **Il coefficiente angolare di una retta può essere determinato conoscendo due punti.**

Esercizio guidato. Determina le rette passanti per i punti:

a) A(2; 3) e B(5; 3)
b) A(2,3) e B(2; 7)
c) A(2; 3) e B(5; -4).

Nel primo esercizio i due punti (avendo la stessa ordinata) individuano una retta parallela all'asse _______.
Sai già che l'equazione di questa retta è ____________, quindi il coefficiente angolare è m= ___________.
Nel secondo esercizio i due punti (avendo la stessa ascissa) individuano una retta parallela all'asse _______.
Sai già che l'equazione di questa retta è ____________, quindi il coefficiente angolare ________________.
Nel terzo esercizio, sostituendo i punti all'equazione di una retta in forma esplicita y=mx+q ottieni due equazioni: 3 = 2m+q e __________, sottraendo membro a membro ottieni 3+4 = 2m+q-5m-q, cioè 7=-3m e quindi $m = \frac{-7}{3}$.

In generale, se la retta passante per i punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ non è parallela all'asse y, puoi calcolare il coefficiente angolare con la formula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Perché la formula scritta non puoi usarla nel caso la retta sia parallela all'asse y? ______________________

____

2. Se due rette, in forma esplicita, hanno lo stesso coefficiente angolare allora

____

___

3. Se il prodotto dei coefficienti angolari di due rette vale -1 allora

____

___

Le proprietà descritte ai punti 2 e 3 sono enunciate in modo più rigoroso dai seguenti teoremi:

Teorema sulle rette parallele. Due rette, non parallele all'asse y, sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare (e viceversa).

Teorema sulle rette perpendicolari. Due rette, non parallele agli assi cartesiani, sono perpendicolari se il coefficiente angolare di una è l'antireciproco dell'altra (il prodotto dei coefficienti angolari è –1) (e viceversa).

4. Insieme delle rette del piano passanti per un punto $P_0(x_0; y_0)$

Le rette passanti per un punto $P_0(x_0; y_0)$ hanno una equazione del tipo $y - y_0 = m(x - x_0)$ che si chiama equazione del fascio proprio. Il punto $P_0(x_0; y_0)$ si chiama centro del fascio.

Tutte le rette del fascio, tranne una (quale?) si ottengono assegnando al coefficiente angolare un qualsiasi numero reale.

5. Insieme delle rette del piano parallele (o perpendicolari) ad una retta data

Le rette parallele (o perpendicolari) ad una retta data (tranne quelle parallele all'asse y) hanno lo stesso coefficiente angolare m (noto), quindi l'equazione è del tipo $y = mx + q$ e si chiama equazione del fascio improprio.

Ogni retta del fascio improprio avrà un diverso valore di **q**.

I concetti che abbiamo ricordato e che avevi già incontrato al biennio sono sufficienti per risolvere qualsiasi problema sulle rette. Ecco un elenco dei problemi che spesso dovrai risolvere.

<u>Determina l'equazione di una retta:</u>

- passante per due punti noti;
- passante per un punto e di coefficiente angolare noto;
- passante per un punto e parallela ad una retta data;
- passante per un punto e perpendicolare ad una retta data;
- passante per un punto e di ordinata all'origine nota.

<u>Dato un fascio di rette di centro noto:</u>

- scrivi l'equazione del fascio;
- scrivi l'equazione della retta del fascio passante per l'origine;
- scrivi l'equazione della retta del fascio passante per un punto noto;
- scrivi l'equazione della retta del fascio di ordinata all'origine nota;
- scrivi l'equazione della retta del fascio parallela all'asse x;
- scrivi l'equazione della retta del fascio parallela all'asse y;
- scrivi l'equazione della retta del fascio di coefficiente angolare noto;
- scrivi l'equazione della retta del fascio parallela ad una retta nota;
- scrivi l'equazione della retta del fascio perpendicolare ad una retta nota;

<u>Dato un fascio di rette di equazione nota (contenente un parametro k):</u>

- scrivi l'equazione della retta del fascio passante per l'origine;
- scrivi l'equazione della retta del fascio passante per un punto noto;
- scrivi l'equazione della retta del fascio di ordinata all'origine nota;
- scrivi l'equazione della retta del fascio parallela all'asse x;
- scrivi l'equazione della retta del fascio parallela all'asse y;
- scrivi l'equazione della retta del fascio di coefficiente angolare noto;
- scrivi l'equazione della retta del fascio parallela ad una retta nota;
- scrivi l'equazione della retta del fascio perpendicolare ad una retta nota;
- scrivi le coordinate del centro del fascio.